راهبرد بُرد

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر و کارشناس ارشد ریاضی، ارومیه

اشاره

با توجه به اینکه اغلب دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات مشکل دارند و در راستای پاسخ دادن به این پرسش دانش‌آموزان که «این مفهوم ریاضی که برای ما تدریس می‌شود، چه کاربردی دارد؟» می‌توان آموزش مفاهیم ریاضی را همراه با ارائهٔ مثال‌های کاربردی، ترتیب دادن زیرکلاس‌هایی با عنوان آزمایشگاه ریاضی و معرفی بازی‌هایی که ماهیت ریاضی دارند پیش‌برد تا یادگیری برای دانش‌آموزان شیرین و آسان شود.

در این مقاله با طرح مسئله‌ای به معرفی یک بازی دو نفره می‌پردازیم و راهبردهایی را که یک بازیکن باید در پیش گیرد تا برندهٔ حتمی بازی شود، یا احتمال بردش را بیشتر کند، بررسی خواهیم کرد. چون این راهبردها با مفهوم هم‌نهشتی (از مباحث نظریهٔ عددها که در کتاب «ریاضی گسستهٔ سال دوازدهم رشتهٔ ریاضی گنجانده شده است) رابطهٔ مستقیمی دارند، لذا پیش از پرداختن به آن‌ها و حل مسئلهٔ مطرح‌شده، مفهوم هم‌نهشتی را تعریف و قضیه‌ای را در این خصوص که بدان نیاز خواهیم داشت، اثبات می‌کنیم. این بازی برای دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه نیز به‌عنوان کاربردی از قواعد بخش‌پذیری می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: بازی و ریاضی، راهبرد برد، هم‌نهشتی.

آزمایشگاه ریاضی

آشنایی دانش‌آموزان با جنبه‌های کاربردی دانش ریاضی، یادگیری آن را برایشان شیرین و آسان‌تر می‌کند.

در این راستا می‌توان ساعت‌هایی از برنامهٔ درسی ریاضی یا بخشی از زنگ‌های ریاضی را به فعالیت‌هایی تحت‌عنوان آزمایشگاه ریاضی اختصاص داد. محیط انجام آزمایش‌ها می‌تواند کلاس درس، حیاط مدرسه یا بسته به نیاز، حتی محیط بیرون از مدرسه باشد. اجازه دهید به ذکر چند نمونه از تجربه‌های خودم در این زیرکلاس‌ها بپردازم:

۱. برای آشنایی دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی با عدد پی می‌توان از آنان خواست که پیرامون اشیایی مدور چون کاسه، فنجان، قابلمه و ... را اندازه‌گیری و بر اندازهٔ قطر تقسیم کنند. در دورهٔ اول متوسطه می‌توان به این منظور با علامت‌گذاری نقطه‌ای از لاستیک یک دوچرخه که با زمین تماس دارد و حرکت دادن دوچرخه روی یک خط مستقیم، به تعداد ۱ یا چند دور، محیط چرخ را محاسبه و بر قطر آن تقسیم کرد.

در دورهٔ دوم متوسطه برای دانش‌آموزانی که در درس فیزیک با دورهٔ تناوب آونگ ساده $(T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}})$ آشنا شده‌اند، می‌توان پا را فراتر گذاشت و با ترتیب دادن آزمایشی واقعی روی یک آونگ ساده، T را محاسبه کرد. این کار

پس از جاگذاری L و g در فرمول مربوطه، به محاسبهٔ π می‌انجامد.

همچنین، برای سهولت به خاطرسپاری عدد پی تا ۱۰ رقم اعشار برای دانش‌آموزان علاقه‌مند، می‌توانیم آنان را به حفظ بیت زیر ترغیب کنیم:

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان
ره سر منزل مقصود به ما آموزد

$\pi \simeq ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵$

۲. به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ **تالس** و مفهوم تشــابه، می‌توان اندازه‌گیری ارتفاع‌های بلند، مانند تیرهای نورافکن در پارک‌ها یا میل پرچم داخل حیاط مدرسه را مدنظر قرار داد. به این صورت که می‌توان دانش‌آموزان را در یک روز آفتابی به حیاط مدرسه یا یک پارک برد و به کمک میله‌ای مثلاً یک متری (به‌عنوان شاخص)، از طول سایه‌ها استفاده و طول مجهول را محاسبه کرد.

۳. برای جذاب شدن یادگیری حل معادلهٔ درجهٔ اول و ساده کردن عبارت‌های جبری، می‌توان یک بازی دو نفره ترتیب داد؛ به این صورت که نفر اول از نفر دوم می‌خواهد که عددی را (ترجیحاً کوچک و صحیح) در نظر بگیرد. پس از این کار از او می‌خواهد که یک سلسله عملیات جبری روی آن عدد انجام دهد و در پایان نتیجه را به او بگوید. در نهایت نفر اول با حل معادلهٔ درجهٔ اول مربوطه عدد مورد نظر را پیدا می‌کند و به او باز می‌گوید. به مثال زیر توجه کنید:

آشنایی دانش‌آموزان با جنبه‌های کاربردی دانش ریاضی، یادگیری آن را برایشان شیرین و آسان‌تر می‌کند. در این راستا می‌توان ساعت‌هایی از برنامهٔ درسی ریاضی یا بخشی از زنگ‌های ریاضی را به فعالیت‌هایی تحت‌عنوان آزمایشگاه ریاضی اختصاص داد

نفر اول: عددی را در نظر بگیر.
نفر دوم: گرفتم (مثلاً ۵).
نفر اول: آن را با ۳ جمع کن (حاصل ۸).
نفر اول: نتیجه را منهای ۴ کن (حاصل ۴).
نفر اول: نتیجه را با ۶ جمع کن (حاصل ۱۰).
نفر اول: حاصل را دو برابر کن (حاصل ۲۰).
نفر اول: از عدد حاصل، ۵ تا کم کن (حاصل ۱۵).
نفراول: حاصل را به من بگو.
نفر دوم: حاصل ۱۵ می‌شود.

نفر اول معادلهٔ ۱۵ = ۵- (۶+ ۴-۳+x)۲ یا ۱۵ = ۵ + 2x را حل می‌کند و عدد ۵ را می‌یابد.

در واقع آزمایشــگاه ریاضی فرصتی است برای انجام بازی‌هایی که ماهیت ریاضی دارند، حل مثال‌هایی که جنبهٔ کاربردی دارند، و انجام برخی آزمایش‌ها برای حل مسئله‌های ریاضی.

معرفی یک بازی دو نفره و طرح یک مسئله

حــال به موضوع بحث این مقاله می‌پردازیم که یک بازی دو نفره اســت. این بازی تنهــا به تعدادی (اختیاری) سنگ‌ریزه، یا دکمه، یا لوبیا، و موارد مشابه نیاز دارد. طریقهٔ بازی به شرح زیر است:

در آغاز شــروع‌کنندهٔ بازی (نفر اول) باید مشــخص شود. این کار می‌تواند توافقی یا با روش‌هایی مانند گل گل یا سنگ کاغذ قیچی، و یا روش‌های دیگری که بچه‌ها با آن‌ها آشنایی دارند، انجام شود. فرض کنیم بازی را با تعدادی دکمه بخواهیم انجام دهیم. دکمه‌ها را به‌صورت ســتونی روی زمین یا یک میز می‌چینیم (دلیل ستونی چیدن را در ادامه متوجه خواهید شد).

بازی به این صورت شروع می‌شود که هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ دکمه را از ستون بردارد. برندهٔ بازی نفری است که آخرین دکمه‌ها را از ستون بردارد. به عبارت دیگر، ستون (یا زمین بازی) را از دکمه‌ها خالی کند. با ذکر این اشارهٔ کوچک که اگر یکی از بازیکنان برای آخرین برداشت رقیب خود بتواند کاری کند که ۶ دکمه در ستون بماند، چون حداکثر تعدادی که هر نفر می‌تواند بردارد، ۵ تاست، در این صورت برد خود را حتمی خواهد کرد.

اکنون می‌توان دلیل ستونی چیدن مهره‌ها را درک کرد. دلیلش این است که هر یک از بازیکنان در هر لحظه از بازی بتوانند تعداد باقی‌مانده را بشمارند و بدانند. حال با طرح یک مسئله کار را ادامه می‌دهیم.

مسئله: نسترن و **نگار** بازی را با ستونی از ۴۰ عدد دکمه شروع می‌کنند. در هر نوبت هر یک می‌توانند ۱، ۲،

۳، ۴ یا ۵ دکمه از ستون بردارد. بازیکنی که آخرین دکمه را از ستون بردارد، برندهٔ بازی خواهد بود. اگر نگار نفر اول شروع‌کنندهٔ بازی باشد، در اولین نوبت خود باید چند دکمه بردارد که مطمئن شود او برندهٔ بازی خواهد شد؟

حال چون حل مسئله با مفهوم هم‌نهشتی در ارتباط است، لذا پیش از پرداختن به آن به سراغ تعریف هم‌نهشتی و اثبات قضیه‌ای می‌رویم که بدان نیاز داریم.

تعریف هم‌نهشتی

دو عدد صحیح a و b را به پیمانهٔ m (m عدد صحیح مثبت) هم‌نهشت گویند هر گاه a–b بر m بخش‌پذیر باشد $(m|a-b)$. این هم‌نهشتی به‌صورت زیر نموده می‌شود:

$$a \equiv b \quad (\text{به پیمانهٔ } m)$$

برای مثال، با فرض ۶ = n به سادگی دیده می‌شود که (به پیمانهٔ ۶) ۱ ≡ ۱۹ و (به پیمانهٔ ۶) ۴ ≡ ۴۰ .

لم ۱. به ازای عددهای صحیح دلخواه a و b، اگر (به پیمانهٔ m) $a \equiv b$، آن‌گاه a و b بر m باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند.

اثبات: چون: (به پیمانهٔ m) $a \equiv b$، پس: $m|a-b$. یعنی به ازای عدد صحیح k‌ای $a-b=km$ یا $a=b+km$. اگر b را بر m تقسیم کنیم، بنا بر الگوریتم تقسیم، عددهای صحیح q (خارج قسمت) و r (باقی‌مانده) را خواهیم داشت، به‌طوری که: $b=qm+r$، که: $0\le r<m$. بنابراین:

$$a = qm + r + km = (q+k)m + r$$

یعنی باقی‌ماندهٔ a بر m هم برابر r است.

لم ۲. به ازای عددهای صحیح دلخواه b و m، اگر: $b<m$ آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر m برابر b است.

اثبات: چون $b<m$، پس بنابر الگوریتم تقسیم، $q=0$ و $r=b$ خواهد بود.

قضیه: به ازای عددهای صحیح a، b و m ($m>0$ و $b<m$)، اگر: (به پیمانهٔ m) $a \equiv b$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m برابر b است.

اثبات: با توجه به لم‌های ۱و۲، حکم قضیه برقرار است.

حل مسئله (راهبرد برد)

نگار نفر اول و شـــروع‌کنندهٔ بازی اســـت. چون حداکثر تعداد دکمه‌ای که هر بازیکن می‌تواند از ستون بردارد، ۵ است، لذا اگر نگار بتواند برای آخرین برداشت رقیبش (نسترن)، ۶ تا دکمه باقی بگذارد، دیگر نسترن نمی‌تواند کاری انجام دهد و نگار می‌تواند برندهٔ مسلم بازی باشد.

و اما چگونه؟

چون: (به پیمانهٔ ۶) ۴ ≡ ۴۰ ، لذا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴۰ بر ۶ برابر ۴ است. پس اگر نگار در اولین نوبت خود ۴ دکمه بردارد و سپس منتظر نسترن شود و کار را طوری جلو ببرد که مجموع تعداد دکمه‌های برداشتی او و نسترن برابر ۶ شود، برد خود را تضمین می‌کند. پس در اولین حرکت ۴ دکمه برمی‌دارد. در ادامه، اگر نسترن ۱ دکمه برداشت، او ۵ مهره برمی‌دارد، اگر نسترن ۲ دکمه برداشت، او ۴ دکمه برمی‌دارد و ...

به نمونهٔ بازی زیر توجه کنید:

نگار	۴	۳	۵	۴	۲	۱	۴	برندهٔ بازی
نسترن	۳	۱	۲	۴	۵	۲		

بررسی راهبردهای برد در حالت‌های متفاوت

دو پرسش مطرح است:

۱. اگر نگار نفر دوم باشد، با چه راهکاری می‌تواند به برد برسد؟

۲. اگر تعداد دکمه‌ها بر ۶ بخش‌پذیر باشد، وضع چگونه خواهد بود؟

یاد گرفتیم که برای نفر اول (با شرط بخش‌پذیر نبودن تعداد دکمه‌ها بر ۶)، راهبرد برد حتمی این‌گونه است که در اولین حرکت خود، به تعداد باقی‌ماندهٔ تقســـیم تعداد مهره‌ها بر ۶ برمی‌دارد و در ادامه مجموع را ۶ می‌کند. برای مثال، در بازی نگار و نســـترن اگر تعداد دکمه‌ها به جای ۴۰ برابر ۵۰ باشد و نگار نفر اول باشد، چون: (به پیمانهٔ ۶)

۵۰ ≡ ۲، پس اگر نگار ابتدا ۲ دکمه بردارد و در ادامه مجموع را ۶ کند، برندهٔ حتمی خواهد بود. اما اگر نگار نفر دوم باشد، نسترن شروع‌کنندهٔ بازی است. اگر او از راهبرد برد نفر اول مطلع باشد، دیگر نگار کاری نمی‌تواند بکند. در غیر این‌صورت باز هم راهکاری برای برد حتمی نگار متصور نیست. ولی او می‌تواند به‌صورت زیر عمل کند تا احتمال بردش را افزایش دهد:

او منتظر نسترن می‌شود تا دکمه‌هایش را بردارد. حال نگار علاوه بر اینکه مجموع را ۶ می‌کند، به تعدادی که می‌تواند، اقدام به جبران آن ۴ تای مطرح‌شده در قسمت قبل می‌کند و اضافه‌تر برمی‌دارد. برای اینکه بهتر متوجه شوید، فرض کنیم نسترن در اولین برداشت خود ۴ دکمه بردارد. خب! نگار ۲ تا از بابت ۶ کردن مجموع برمی‌دارد و علاوه براین، چون می‌تواند تا ۵ دکمه بردارد، ۳ تا هم از بابت جبران آن ۴ تا برمی‌دارد؛ یعنی در مجموع ۵ تا برمی‌دارد. حالا ۳ تا از آن ۴ تا جبران شده است.

در مرحله‌های بعدی، به شرط آنکه نسترن اقدام به برداشتن ۱ دکمه نکند، می‌تواند آن ۱ عدد باقی‌مانده را نیز جبران کند. در هر مرحله از بازی که نگار موفق به جبران شود، در واقع به اصطلاح ورق برمی‌گردد و مثل این می‌شود که نگار نفر اول است و نسترن نفر دوم. نگار ادامهٔ بازی را با ۶ کردن مجموع ادامه می‌دهد. به بازی زیر توجه کنید:

	۱	۲	۳	۲	۱	۴	نسترن
برندهٔبازی	۵	۴	۳	۴+۱=۵	۵	۲+۳=۵	نگار
				۰		۱	باقی‌مانده جبرانی
	۰	۶	۱۲	۱۸	۲۵	۳۱	تعداد دکمهٔ باقی‌مانده در ستون

همان‌گونه که مطرح شد، در این حالت راهکاری برای برد حتمی نفر دوم وجود ندارد. ولی اگر نفر دوم طبق روالی که گفته شد عمل کند، احتمال بردش را افزایش می‌دهد. مثلاً اگر نفر اول اصرار بر برداشتن فقط یک دکمه داشته باشد، دیگر نفر دوم کاری از پیش نمی‌تواند ببرد. (چرا؟)

حال به سراغ پرسش دوم می‌رویم. اگر تعداد دکمه‌ها بر عدد ۶ بخش‌پذیر باشد، این نفر دوم است که می‌تواند با راهکار سادهٔ شش کردن مجموع، برد خود را حتمی سازد. برای مثال، فرض کنیم به جای ۴۰ دکمه، نگار و نسترن با ۳۶ دکمه بازی کنند و باز نگار نفر اول باشد. نسترن منتظر نگار می‌شود و پس از برداشتن او مجموع را ۶ می‌کند. به بازی زیر توجه کنید:

	۱	۴	۲	۳	۴	۱	نگار
برندهٔ بازی	۵	۲	۴	۳	۲	۵	نسترن

و اما در این حالت، آیا نفر اول هم می‌تواند راهکاری برای رسیدن به برد حتمی در پیش گیرد؟ جواب منفی است. نفر اول به شرط عدم اطلاع نفر دوم از راهبرد برد مطرح‌شده، می‌تواند به طریق زیر عمل کند تا احتمال بردش را افزایش دهد.

نگار نفر اول و نسترن نفر دوم، بازی را با ۳۶ دکمه آغاز می‌کنند. نسترن از راهکار برد نفر دوم آگاه نیست و نگار می‌خواهد بازی را ببرد. او باید ابتدا در اولین برداشت به تعداد مینیمم، یعنی ا عدد دکمه بردارد و بعد منتظر نسترن شود. سپس اگر مثلاً نسترن ۲ دکمه برداشت، او برای ۶ کردن مجموع باید ۴ دکمه بردارد، ولی ۳ دکمه برمی‌دارد (در واقع آن ۱ عدد را که اول برداشته بود، جبران می‌کند). سپس به ۶ کردن مجموع‌ها ادامه می‌دهد. در واقع جای نفر اول و نفر دوم از دومین برداشت عوض می‌شود و نگار نفر دوم می‌شود. تعداد دکمه‌ها هم که بر ۶ بخش‌پذیر است (۳۰ = ۶ ـ ۳۶). به بازی زیر توجه کنید:

برندهٔ بازی	۱	۳	۲	۱	۲	۳	۱	نگار
		۵	۳	۴	۵	۴	۲	نسترن

خلاصه

اگر n (تعداد مهره‌های بازی) بر ۶ بخش‌پذیر نباشد، راهبرد برد حتمی برای نفر اول وجود دارد، ولی اگر n بر ۶ بخش‌پذیر باشد، این نفر دوم است که می‌تواند برد خود را حتمی کند.

تحقیق: اگر بازیکنان مجاز به برداشتن ۱، ۲، ۳و ۴ مهره باشند، شرایط چگونه تغییر می‌کند؟

پی‌نوشت: از نسترن و نگار قلعه پوراقدم (دخترانم) که در این مقاله مرا همراهی کردند، سپاس‌گزارم.

منابع

۱. برتن، دیویدام (۱۳۸۱). «نظریهٔ مقدماتی اعداد». ترجمهٔ محمدصادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ اول.
2.Chen. Jane. Twenty More Problem Solving skills for Math Counts Competitions Paper back- september 23, 2011.